Corrigé (2023 – Nouvelle Calédonie – Jour 1)

1. **a.**

$$u_1 = 5u_0 - 4\times 0 - 3 = 5\times 3 - 4 - 3 = 15 - 7 = \boxed{12}$$

b.

$$u_2 = 5u_1 - 4\times 1 - 3 = 5\times 12 - 4 - 3 = 60 - 7 = \boxed{53}$$

c. Il semble que la suite (u_n) soit croissante et tende vers $+\infty$.

2. **a.** Soit P_n la proposition $u_n \geqslant n+1$.
Initialisation : $u_0 = 3$ et $0+1 = 1$.
$3 \geqslant 1$. La proposition est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : on suppose la proposition vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n+1$ (hypothèse de récurrence). On va vérifier qu'alors elle est vraie au rang suivant.

$$\begin{aligned} u_n \geqslant n+1 &\iff 5u_n \geqslant 5(n+1) \\ &\iff 5u_n - 4n - 3 \geqslant 5n + 5 - 4n - 3 \\ &\iff u_{n+1} \geqslant n+2 = (n+1)+1 \end{aligned}$$

La proposition est donc héréditaire.

Conclusion : la proposition P_n est vérifiée au rang $n = 0$ et est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant n+1$.

b. On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$. Puisque $u_n \geqslant n+1$, par comparaison, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$$

3. **a.**

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) - 1 \\ &= 5u_n - 4n - 3 - n - 1 - 1 \\ &= 5u_n - 5n - 5 \\ &= 5(u_n - n - 1) \\ &= 5v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 5$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 - 1 = 2$.

b. Puisque (v_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $v_0 = 2$, on a :

$$\boxed{v_n = 2\times 5^n}$$

c. $v_n = u_n - n - 1 \iff u_n = v_n + n + 1$. Donc :

$$\boxed{u_n = 2\times 5^n + n + 1}$$

d. Puisque $5 > 1$, la suite de terme général 5^n est strictement croissante, donc $5^{n+1} \geqslant 5^n$.

$$\begin{aligned}
5^{n+1} \geqslant 5^n \quad & \iff \quad 2 \times 5^{n+1} \geqslant 2 \times 5^n \\
& \iff \quad 2 \times 5^{n+1} + (n+1) + 1 \geqslant 2 \times 5^n + (n+1) + 1 \\
& \iff \quad u_{n+1} \geqslant 2 \times 5^n + n + 2 \\
& \iff \quad u_{n+1} \geqslant 2 \times 5^n + n + 1 \\
& \iff \quad u_{n+1} \geqslant u_n
\end{aligned}$$

La suite (u_n) est donc croissante.

4. **a.**

```
def suite():
  u=3
  n=0
  while u<10**7:
    u= 5*u-4*n-3
    n=n+1
  return n
```

b.

u	n	u < 10^7
3	0	VRAI
12	1	VRAI
53	2	VRAI
254	3	VRAI
1 255	4	VRAI
6 256	5	VRAI
31 257	6	VRAI
156 258	7	VRAI
781 259	8	VRAI
3 906 260	9	VRAI
19 531 261	10	FAUX

La valeur renvoyée par cette fonction est $n = 10$. C'est le rang à partir duquel $u_n \geqslant 10^7$.

Corrigé (2023 - Amérique du Sud – Jour 1)

Partie A

$$u_{n+1} = 2u_n(1-u_n).$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(1-x).$$

1. f est une fonction polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $f(x) = 2x - 2x^2$, d'où $f'(x) = 2 - 4x = 2(1-2x)$.
   On a :
   - $f'(x) = 0 \iff 1-2x = 0 \iff x = \frac{1}{2}$;
   - $f'(x) > 0 \iff 1-2x > 0 \iff x < \frac{1}{2}$; la dérivée est positive sur $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$, la fonction f est donc croissante sur cet intervalle.
   - $f'(x) < 0 \iff 1-2x < 0 \iff x > \frac{1}{2}$;
2. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}$.
   - $u_1 = 2u_0(1-u_0) = 2 \times 0,3 \times 0,7 = 0,42$.
   - Démonstration par récurrence :
     - *Initialisation* : on a $u_0 \leqslant u_1$ car $0,3 \leqslant 0,42$.
     - *Hérédité* On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant u_{n+1}$.
       Comme on suppose que $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ on a par croissance de la fonction f sur $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$, $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$, soit
       $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, ou encore $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
       La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle l'est encore au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence on a démontré que :
       pour tout rentier naturel n, $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$
3. Cet encadrement montre que
   - la suite (u_n) est croissante et
   - la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

   Conclusion la suite (u_n) croissante et majorée converge vers une limite $\ell \leqslant \frac{1}{2}$.

4. La fonction f étant continue on a donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2u_n(1-u_n)$, soit

$\ell = 2\ell(1-\ell) \iff \ell = 2\ell - 2\ell^2 \iff 2\ell^2 - \ell = 0 \iff \ell(2\ell-1) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} \ell & = & 0 \\ 2\ell - 1 & = & 0 \end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{rcl} \ell & = & 0 \\ \ell & = & \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$ La seule solution acceptable est $\ell = \dfrac{1}{2}$.

Partie B

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.

   a. La relation de récurrence s'écrit alors $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0 \times P_n)$, soit $P_{n+1} - P_n = P_n \iff P_{n+1} = 2P_n$, donc $P_{n+1} = 2P_n$: cette égalité montre que la suite (P_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $P_0 = 3$.

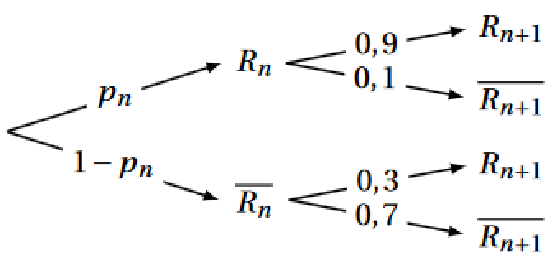
   b. On sait quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0 \times 2^n = 3 \times 2^n$: la limite de la suite (P_n) est plus l'infini (irréaliste)

2. Dans cette question $b = 0,2$. On a donc $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0,2P_n)$

   a. On a $v_0 = 0,1 \times P_0 = 0,1 \times 3 = 0,3$.
   La relation de récurrence devient :
   $P_{n+1} - P_n = P_n(1 - 0,2 \times P_n) \iff P_{n+1} - P_n = P_n - 0,2P_n^2$, d'où
   $P_{n+1} = 2P_n - 0,2P_n^2$. (1)
   Or $v_{n+1} = 0,1P_{n+1} = 0,1\left(2P_n - 0,2P_n^2\right) = 0,2\left(P_n - 0,1P_n^2\right)$.
   Comme $v_n = 0,1 \times P_n \iff 10v_n = P_n$, l'égalité ci-dessus devient :
   $v_{n+1} = 0,2\left(10v_n - 0,1 \times (10v_n)^2\right)$, soit
   $v_{n+1} = 0,2\left(10v_n - 10v_n^2\right) = 2v_n(1 - v_n)$.

   b. La relation de la question précédente montre que la suite (v_n) est la suite (u_n) de la **Partie A** et on a vu que cette suite converge vers $\dfrac{1}{2}$.
   On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$.
   Or $P_n = 10v_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = 10 \times \dfrac{1}{2} = 5$.
   Finalement la population se rapprochera de 5 000 individus.

Corrigé

1. 

2. Les évènements R_n et $\overline{R_n}$ partitionnent l'univers, la loi des probabilités totales donne :

$p_{n+1} = P(R_{n+1}) = P\left(R_n \cap R_{n+1}\right) + P\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right) = p_n \times 0,9 + (1-p_n) \times 0,3 = 0,9p_n + 0,3 - 0,3p_n$

Donc on a bien $p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3$: on a donc bien établi la relation de récurrence annoncée.

3. **a.** Établissons la relation de récurrence de la suite (u_n). Soit n un entier naturel :

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,75$ par définition de la suite (u_n)

$= (0,6p_n + 0,3) - 0,75$ par la relation de récurrence de la suite (p_n)

$= 0,6p_n - 0,45$

$= 0,6(u_n + 0,75) - 0,45$ par définition de la suite (u_n)

$= 0,6u_n + 0,45 - 0,45$

$= 0,6u_n$

La relation de récurrence de la suite (u_n) est donc bien celle d'une suite géométrique, de raison $q = 0,6$. Le premier terme de la suite est $u_0 = p_0 - 0,75 = 0,6 - 0,75 = -0,15$.

b. On peut donc donner la forme explicite du terme général de la suite géométrique :

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \times q^n = -0,15 \times 0,6^n$.

On en déduit : $u_n = p_n - 0,75 \iff p_n = u_n + 0,75 = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n$.

$$p_n = 0,75 - 0,15 \times 0,6^n.$$

c. La raison de la suite géométrique u est comprise entre -1 et 1, strictement, donc la suite u converge vers 0.

Par limite de la somme, on en déduit que la suite p converge vers $\ell = 0,75$.

d. En assimilant les probabilités à des proportions, au bout d'un certain temps, l'athlète franchira la barre dans 75 % des cas.

Corrigé (2024 – Polynésie – Jour 1)

On considère une pyramide à base carrée formée de boules identiques empilées les unes sur les autres :

- le 1er étage, situé au niveau le plus haut, est composé de 1 boule;
- le 2e étage, niveau juste en dessous, est composé de 4 boules;
- le 3e étage possède 9 boules;
- ...
- le n-ième étage possède n^2 boules.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n le nombre de boules qui composent le n-ième étage en partant du haut de la pyramide. Ainsi, $u_n = n^2$.

1. Le nombre total de boules d'une pyramide de 4 étages est :
$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30.$
2. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier $n \geqslant 1$ par $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

a. $S_5 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = \left(u_1 + u_2 + u_3 + u_4\right) + u_5 30 + 5^2 = 55$

Le nombre total de boules d'une pyramide de 5 étages est : $S_5 = 55$.

b. On complète la fonction `pyramide` ci-dessous de sorte que, pour tout entier naturel non nul n, l'instruction `pyramide(n)` renvoie le nombre de boules composant une pyramide de n étages.

```
def pyramide(n) :
    S = 0
    for i in range(1, n+1) :
        S = S + i**2
    return S
```

c. Pour tout entier naturel n :

- $$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{8}$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$
- $$\frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+3n+4n+6)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

Donc $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6}$

d. On démontre par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$: $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- **Initialisation**

  Pour $n = 1$, on a $S_1 = 1$ et $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \dfrac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = \dfrac{1\times 2\times 3}{6} = 1$

  Donc la propriété est vraie au rang 1.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang n, avec $n \geqslant 1$, c'est-à-dire $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
  C'est l'hypothèse de récurrence.

  $$\begin{aligned} S_{n+1} &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1} = \left(u_1 + u_2 + \cdots + u_n\right) + u_{n+1} \\ &= S_n + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)(n+2)[2(n+1)+1]}{6} \text{ (d'après la question précédente)} \\ &= \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} \end{aligned}$$

  Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 1, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 1$.
  Donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$: $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Un marchand souhaite disposer des oranges en pyramide à base carrée. Il possède 200 oranges.

Il faut donc trouver le plus grand entier n tel que $S_n \leqslant 200$.

On calcule : $S(7) = \dfrac{7(7+1)(2\times 7+1}{6} = 140 < 200$ et $S(8) = \dfrac{8(8+1)(2\times 8+1)}{6} = 204 > 200$.

Le marchand utilise donc 140 oranges pour construire une pyramide à 7 étages.